BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan
September 2021 Vol. 15 No. 3 Page 409 – 416
P-ISSN: 1978-7227 E-ISSN: 2615-3017
doi : https://doi.org/10.30598/ barekengvol15iss3pp409-416
National Accredited in SINTA 3, Decree No.: 28/E/KPT/2019

PENERAPAN KONVOLUSI PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER ORDE DUA TAK HOMOGEN KOEFISIEN KONSTAN

Implementation of The Convolution on Nonhomogeneous Second Order Linear Differential Equation of Constant Coefiscients

Gani Gunawan

Program Studi Matematika FMIPA Universitas Islam Bandung
Jln. Rannga Gading, No. 8, Bandung 40116, Indonesia

Corresponding author e-mail: ggani9905@gmail.com

Abstrak

Prinsip *Duhamel* menyiratkan adanya suatu metoda matematika tertentu untuk menyelesaikan sebuah persamaan diferensial linier orde dua tak homogen dengan koefisien konstan. Penelusuran teori terhadap pengertian transformasi integral menunjukkan adanya suatu cara yang dapat digunakan dalam menentukan penyelesaian khusus persamaan diferensial tersebut. Dalam artikel ini ditunjukkan bahwa operasi konvolusi sebagai transformasi integral yang melibatkan dua buah fungsi merupakan penyelesaian khusus dari suatu persamaan diferensial yang memenuhi prinsip *Duhamel*.

Kata kunci : *Prinsip Duhamel, Persamaan Diferensial, Konvolusi*

Abstract

Duhamel's principle implies the existence of a certain mathematical method to solve a nonhomogeneous second-order linear differential equation of constant coefficients. The theoretical investigation of the definition of integral transformation shows that there is a method that can be used to determine the particular solution of these differential equations. In this article is shown that the convolution operation as an integral transformation involving two functions is a particular solution of a differential equation that satisfies Duhamel's principle.

Keywords: *Duhamel's Principle, Differential Equation, Convolution*

Article info:

Submitted: 16th April 2021 *Accepted: 05th July 2021*

How to cite this article:

G. Gunawan, "PENERAPAN KONVOLUSI PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER ORDE DUA TAK HOMOGEN KOEFISIEN KONSTAN", *BAREKENG: J. Il. Mat. & Ter.*, vol. 15, no. 03, pp. 409-416, Sep. 2021.

1. PENDAHULUAN

Seperti yang telah diketahui bahwa penyelesaian persamaan diferensial orde dua linear tak homogen koefisien konstan dengan syarat awal yang diberikan di dalam hampir semua kepustakaan selalu dilakukan dengan dua metoda, khususnya saat menentukan penyelesaian partikular. Kedua metoda tersebut adalah metoda koefisien tak tentu dan metoda variasi parameter, seperti yang dinyatakan dalam kepustakaan [1], [2], [3], [4], dan [5]. Operasi matematik pada kedua metoda tersebut melibatkan banyak operasi turunan, integral, dan aljabar matrik. Dalam artikel ini akan diperkenalkan suatu metoda yang berbeda dengan kedua metoda tersebut, khususnya bilamana persamaan diferensial yang diberikan memenuhi prinsip *Duhamel* (lihat [6] dan [7]). Penyelesaian matematis persamaan yang memenuhi prinsip tersebut dapat ditentukan melalui operasi konvolusi transformasi Laplace.

Dalam kalkulus diferensial, *Eugen J. Ionascu* [3] dan [8] dinyatakan bahwa bentuk umum persamaan diferensial biasa orde dua linier dengan syarat awal yang diberikan ditulis

$$y''+ay'+by=r(t), \qquad y(0)=K_0, \qquad y'(0)=K_1, \tag{1}$$

dengan a, b adalah konstanta, K_0 , K_1 adalah nilai awal, dan $r(t) \neq 0$. Penyelesaian untuk Persamaan (1) tersebut seperti yang dinyatakan dalam [1], [2], [3], [4], dan [5] adalah berupa fungsi

$$y(t)=y_h(t)+y_p(t)$$

dengan $y_h(t)$ adalah penyelesaian umum dari Persamaan (1) dalam bentuk homogen, dan $y_p(t)$ adalah penyelesaian partikular.

Ide dasar penelitian ini diinspirasi oleh banyaknya penggunaan Persamaan (1) dalam berbagai persoalan terapan ([5], [9], dan [10]) juga termotivasi oleh topik pembahasan pada kepustakaan [11], [12], [13], [14], [15], dan [16] yaitu adanya transformasi integral yang dapat digunakan untuk menyelesaikan Persamaan (1). Dalam artikel ini akan ditentukan penyelesaian Persamaan (1) yang memenhi prinsip *Duhamel* tanpa harus menentukan penyelesaian umum terlebih dulu, sehingga penyelesaian yang diperoleh memenuhi syarat awal yang diberikan.

2. METODE PENELITIAN

Berdasar pada hasil yang diperoleh dari kepustakaan [7] dan [17] dinyatakan bahwa adanya suatu operasi transformasi integral yang melibatkan dua buah fungsi pada daerah integrasi non negatif yang dapat digunakan untuk menentukan penyelesaian Persamaan (1). Pengoperasian transformasi integral tersebut dinotasikan dengan tanda bintang ("$*$") yang disebut konvolusi, seperti yang dinyatakan pada Definisi 1 di bawah ini.

Definisi 1. *Misal f(t) dan g(t) adalah fungsi yang terdefinisi pada $t \geq 0$. Konvolusi f dan g dinotasikan dengan $f*g$ dan didefisikan oleh:*

$$(f*g)(t)=\int_{\tau=0}^{t} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \text{ , untuk suatu } \tau \geq 0 \tag{2}$$

Konvolusi mempunyai sifat sebagai berikut

$$f*g=g*f \qquad \text{(komutatif)}$$

$$(f*g)*h=f*(g*h) \qquad \text{(assosiatif)}$$

$$f*(g+h)=(f*g)+(f*h) \qquad \text{(disributif)}$$

juga bersifat bahwa $f*0=0*f=0$ dan $f*1\neq f$ serta $(f*f)(t)\geq 0$ yang tidak selalu dipenuhi untuk suatu $t \geq 0$.

Konvolusi yang dinyatakan dalam artikel ini adalah suatu proposisi yang merupakan penyelesaian dari Persamaan (1) jika memenuhi syarat prinsip Duhamel. Dalam hal ini konvolusi digunakan sebagai transformasi Laplace invers dari produk fungsi transfer dan persamaan bantu. Sebelum melihat proposisi dan buktinya, berikut diperlihatkan definisi transformasi Laplace dan beberapa sifatnya yang diperkenalkan pertama kali oleh ahli matematika berkebangsaan Perancis, Piere Simon Marquis De Laplace (1749-1827) (lihat [18] dan [19]) yang akan digunakan dalam pembahasannya.

Definisi 2. *Misal f(t) terdefinisi pada $t \geq 0$, transformasi Laplace f(t) dinotasikan oleh $\Lambda\{f(t)\}$ ditulis $F(s)$ dan didefinisikan dalam bentuk*

$$\Lambda\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(s) \tag{3}$$

dimana $f(t)$ kontinu bagian demi bagian untuk setiap interval berhingga yang termuat dalam $t \geq 0$ dan memenuhi

$$|f(t)| \leq Me^{-kt} \tag{4}$$

untuk suatu konstanta k dan M dengan $s > k$, *Kreyszig* [2]. Fungsi $F(s)$ disebut transformasi Laplace merupakan fungsi baru yang bergantung pada variable s adalah hasil dari pentransformasian fungsi asal $f(t)$ yang hanya bergantung pada variabel t. Selanjutnya *transformasi Laplace invers* dari $F(s)$ atau $f(t)$ dinotasikan oleh $\Lambda^{-1}\{F(s)\}$ sedemikian sehingga $f(t) = \Lambda^{-1}\{F(s)\}$.

Transformasi Laplace bersifat linier begitu juga inversnya, yaitu untuk suatu konstanta a dan b berlaku

$$\Lambda\{af(t) + bg(t)\} = a\Lambda\{f(t)\} + b\Lambda\{g(t)\}$$

dan

$$\Lambda^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\Lambda^{-1}\{F(s)\} + b\Lambda^{-1}\{G(s)\}$$

Lebih lanjut dapat dinyatakan transformasi Laplace untuk turunan $f(t)$ seperti pada Teorema 3 di bawah ini, (bukti lihat [4]).

Teorema 3. *Misal $f(t)$ kontinu untuk setiap $t \geq 0$ yang memenuhi (4) dan $f'(t)$ kontinu bagian demi bagian pada setiap interval berhingga dalam $t \geq 0$, maka $\Lambda\{f'(t)\}$ ada dan*

$$\Lambda\{f'(t)\} = s\Lambda\{f(t)\} - f(0) \text{ untuk } s > k$$

Akibat dari Teorema 3 tersebut dapat diperluas transformasi Laplace dari turunan tingkat dua $f(t)$, yakni

$$\begin{aligned}\Lambda\{f''(t)\} &= \Lambda\{f'(t)\} - f'(0)\\ &= s[s\Lambda\{f(t)\}] - f'(0)\\ &= s^2\,\Lambda\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

Selanjutnya dapat diperluas transformasi Laplace untuk turunan tingkat n dari $f(t)$ sebagai berikut;

$$\Lambda\left\{f^{(n-1)}(t)\right\} = s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots f^{(n-1)}(0) \tag{5}$$

dengan asumsi semua turunan fungsi pada (5) tersebut memenuhi kondisi (4).

Selain itu dipunyai juga transformasi Laplace yang menghasilkan bentuk pergeseran (*translasi*). Pergeseran dari transformasi ini mempunyai dua bentuk seperti yang dinyatakan pada teorema di bawah ini,

Teorema 4 (a). *Misal $f(t)$ fungsi yang memenuhi (4). Jika $\Lambda\{f(t)\} = F(s)$ (untuk $s > k$) maka*

$$\Lambda\{e^{at}f(t)\} = F(s-a) \text{ untuk } s-a > k \tag{6}$$

Bukti. Melalui penggantian variabel s pada (3), akan diperoleh $F(s-a)$, karena $f(t)$ memenuhi (4) maka $F(s)$ ada untuk $s > k$, jadi untuk $s-a > k$ pastilah $F(s-a)$ ada, dan

$$F(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\left[e^{at} f(t)\right]dt = \Lambda\{e^{at}f(t)\} \qquad \square$$

Teorema 4 (b). *Misal $f(t)$ fungsi yang memenuhi (4). Jika $\Lambda\{f(t)\} = F(s)$ (untuk $s > k$) maka transformasi Laplace dari fungsi translasi*

$$f(\tau) = f(t-a)u(t-a) = \begin{cases} 0 & jika\ t < a \\ f(t-a) & jika\ t > a \end{cases}$$

adalah $e^{-as}F(s)$, *yaitu*

$$\Lambda\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

Bukti. Berdasar Definisi 2 melalui Persamaan (3) diperoleh:

$$e^{-as}F(s) = e^{-as}\int_0^\infty e^{-st} f(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau)\, d\tau = \int_0^a e^{-s(\tau+a)} f(\tau)\, d\tau + \int_a^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau)\, d\tau = \int_a^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau)\, d\tau$$

selanjutnya dengan mengganti $\tau + a = t$ didapat

$$e^{-as}F(s) = e^{-as}\int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\, dt$$

Kemudian integran pada ruas kanan dari persamaan terakhir ini dikalikan dengan fungsi tangga satuan $u(t-a)$, sehingga terbukti bahwa:

$$e^{-as}F(s) = e^{-as}\int_0^\infty e^{-st} f(t-a)u(t-a)\, dt = \Lambda\{f(t-a)u(t-a)\} \qquad \square$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan Definisi 1 dan Definisi 2 tersebut dapat dinyatakan suatu produk transformasi Laplace dari konvolusi dua buah fungsi seperti yang dinyatakan dalam Proposisi 5 di bawah ini berikut dengan pembuktinya.

Proposisi 5. *Misal* $r(t)$ *dan* $q(t)$ *memenuhi asumsi* (4), *maka produk dari* $R(s)$ *dan* $Q(s)$ *adalah* $Y(s) = \Lambda\{y(t)\}$ *dengan* $y(t) = (r * q)(t)$ *sedemikian sehingga*

$$y(t) = \int_0^t r(\tau)q(t-\tau)\,d\tau \tag{7}$$

Bukti. Dengan menggunakan Definisi 2.1, Definsi 2.2, dan Teorema 2.4 (*b*), maka untuk suatu $\tau \geq 0$ akan dipunyai

$$e^{-s\tau}Q(s) = \Lambda\{q(t-\tau)u(t-\tau)\}$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} q(t-\tau)u(t-\tau)\, dt$$

$$= \int_\tau^\infty e^{-st} q(t-\tau)\, dt \quad \text{untuk } s > k,$$

akibatnya diperoleh

$$R(s)Q(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} r(\tau)Q(s)\, d\tau$$

$$= \int_0^\infty r(\tau)\int_\tau^\infty e^{-st} q(t-\tau)\,dt\,d\tau$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\int_\tau^\infty r(\tau)q(t-\tau)\,d\tau\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{st} y(t)dt$$

$$= \Lambda\{y(t)\}$$

dimana persamaan terakhir merupakan bentuk transformasi Laplace dari konvolusi, seperti yang dinyatakan pada Persamaan (7), terbukti. □

3.1 Penerapan Konvolusi Terhadap Prinsip Duhamel

Persamaan diferensial yang memenuhi prinsip Duhamel adalah Persamaan (1) dengan syarat awal $K_0 = 0$ dan $K_1 = 0$. Penyelesaian dari persamaan diferensial yang memenuhi prinsip tersebut merupakan fungsi konvolusi (lihat [7]). Cara matematis yang dapat ditentukan adalah dengan menggunakan Persamaan (7) pada Teorema 2.4, yaitu teorema konvolusi melalui transformasi Laplace untuk turunan seperti yang dinyatakan pada (5) dengan mengambil n = 2. Ada tiga langkah yang harus dilakukan. **Pertama**, Persamaan (1) ditransformasi melalui Persamaan (5) untuk n = 2 sedemikian sehingga diperoleh persamaan bantu (*subsidiary equation*) $R(s)$, yaitu $R(s) = \Lambda\{r(t)\}$. Jika $Y(s) = \Lambda\{y(t)\}$, maka dengan Persamaan (5) untuk n = 2, diperoleh hasil transformasi Laplace pada Persamaan (1) khususnya dengan syarat awal $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ dan $r(t) \neq 0$, yaitu

$$\left(s^2 + as + b\right)Y(s) = (s+a)\,y(0) + y'(0) + R(s)$$

Langkah **kedua**, menentukan $Y(s)$ dengan membagi kedua ruas persamaan tersebut oleh $(s^2 + as + b)$, sehingga diperoleh:

$$Y(s) = \left[\left((s+a)\,y(0) + y'(0)\right) + R(s)\right]Q(s)$$

dengan

$$Q(s) = \frac{1}{\left(s^2 + as + b\right)}$$

yang merupakan *fungsi transfer*. Karena $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ maka diperoleh:

$$Y(s) = R(s)Q(s)$$

atau dalam bentuk *quotien* ditulis:

$$Q(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

Selanjutnya langkah **ketiga**, adalah melakukan inversi terhadap $Y(s)$, yaitu $\Lambda^{-1}\{Y(s)\}$ sedemikian sehingga $y(t) = \Lambda^{-1}\{Y(s)\}$. Dengan melakukan transformasi Laplace invers terhadap $Y(s) = R(s)Q(s)$, maka berdasar Persamaan (7) yang dinyatakan pada proposisi 5 diperoleh bentuk konvolusi yang merupakan representasi integral

$$\int_0^t q(t-\tau)\,r(\tau)\,d\tau$$

Jadi penyelesaian dari persamaan diferensial ordo dua liniear tak homogen koefisien konstan yang memenuhi prinsip Duhamel adalah bentuk konvolusi, yaitu

$$y(t) = (q * r)(t)$$

3.2 Penerapan Hasil

Sebagai ilustrasi hasil dari pembahasan di atas, uraian berikut merupakan persoalan dari kasus tersebut. Ilustrasi ini menunjukkan bahwa konvolusi dapat diterapkan dalam menyelesaian persamaan diferesial (1) yang memenuhi syarat prinsip Duhamel. Misalkan:

$$y'' + 3y' + 2y = r(t)$$

dimana

$$r(t) = \begin{cases} 1 & ,1 < t < 2 \\ 0 & , \text{ lainnya} \end{cases}$$

dengan syarat $y(0) = 0$ dan $y'(0) = 0$. Penyelesaian dari persoalan tersebut dapat ditentukan melalui Persamaan (9) dan Persamaan (8), yaitu:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

dengan

$$R(s) = \frac{1}{s} \quad ; \quad Q(s) = \frac{1}{(s^2 + 3s + 2)}$$

Dalam hal ini $Q(t)$ dapat ditulis secara parsial, yaitu:

$$Q(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Dengan menginversi $R(s)$ dan $Q(s)$ didapat:

$$r(t) = 1$$

dan

$$q(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Selanjutnya digunakan Persamaan (7) pada Proposisi 5, sehingga diperoleh penyelesaian persamaan diferensial tersebut sebagai berikut:

$$y(t) = \int_1^t q(t-\tau) r(\tau) d\tau$$

$$= \int_1^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}] d\tau$$

$$= \frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2} e^{-2(t-1)}$$

Jadi

$$y(t) = \frac{1}{2} - e^{-(t-1)} + \frac{1}{2} e^{-2(t-1)}$$

adalah merupakan penyelesaian khusus dari persamaan diferensial persoalan di atas.

4. KESIMPULAN

Konvolusi merupakan hasil inversi transformasi Laplace produk persamaan bantu (*subsidiary equation*) dan fungsi transfer dari suatu persmaan diferensial yang memenuhi prinsip Duhamel, dan merupakan penyelesaian khusus dari persamaan diferensial tersebut, yaitu

$$y(t) = (q * r)(t)$$

dengan fungsi $q(t)$ dan $r(t)$ masing-masing adalah transformasi Laplace invers fungsi transfer dan persamaan bantu. Sehingga melalui operasi kovolusi dapat diterapkan suatu metoda untuk menentukan penyelsaian khusus persamaan (1) yang memenuhi prinsip Duhamel.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Dale Varberg and Edwin J Purcell, *Calculus with Analytic Geometry, Sixth Edition, New Jersey, Prentice Hall,1992*. .

[2] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics, 8th Edition, New York, USA, John Wiley & Sons, Inc, 2003*.

[3] E. J. Ionascu, *Ordinary Differential Equations, Georgia Institute of Technology, Lectur Notes, 2006*. .

[4] William E. Boyce and Richard C.DiPrima., *Elementary Differential Equations And Boundary Value Problems, Fifth Edition, New York, USA , John Wiley & Sons, Inc,, 1992*. .

[5] M. T. Sitanggang, T. Ginting, and T. R. Simbolon, “Aplikasi Fungsi Green Pada Dinamika Sistem Fisis-Massa Pegas Dengan Shock Absorber,” pp. 1–7.

[6] M. A. Fathurrohman Al Ayubi, Dorrah Aziz, “Menyelesaikan Persamaan Diferensial Linier Orde-n Non Homogen Dengan Fungsi Green. Prosiding Seminar Nasional Metoda Kuantitatif, ISBN No. 978-602-98559-3-7, 2017.”

[7] G. Gunawan, “Prinsip Duhamel dan Teorema Konvolusi. Prosiding Seminar Nasional Matematika. UNPAR, AA 10-15, ISSN 1907-3909 Vol. 7. 2012.”

[8] S. C. Sihombing and A. Dahlia, “Penyelesaian Persamaan Diferensial Linier Orde 1 dan 2 disertai Nilai Awal dengan Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Lima Butcher dan Felhberg (RKF45),” *J. Mat. Integr.*, vol. 14, no. 1, p. 51, 2018, doi: 10.24198/jmi.v14.n1.15953.51-60.

[9] M. N. Mthiyane and A. Hugo, “肖沉 1, 2, 孙莉 1, 2Δ, 曹杉杉 1, 2, 梁浩 1, 2, 程焱 1, 2,” *Tjyybjb.Ac.Cn*, vol. 3, no. 2252, pp. 58–66, 2019, [Online]. Available: http://www.tjyybjb.ac.cn/CN/article/downloadArticle File.do?attachType=PDF&id=9987.

[10] A. D. A. N. Vegetasi, “Aplikasi Transformasi Laplace Dalam.”

[11] S. A. S. Al-sook, “Laplace – Elzaki Transform and its Properties with Applications to Integral and Partial Differential Equations,” vol. 96, no. 2, pp. 96–110.

[12] T. M. Elzaki, “The new integral transform ‘Elzaki transform,’” *Glob. J. Pure Appl. Math.*, vol. 7, no. 1, pp. 57–64, 2011.

[13] T. M. Elzaki, S. M. Elzaki, and E. A. Elnour, “On the New Integral Transform ‘ELzaki Transform’ Fundamental Properties Investigations and Applications,” *Glob. J. Math. Sci. Theory Pract.*, vol. 4, no. 1, pp. 1–13, 2012, [Online]. Available: http://www.irphouse.com.

[14] T. M. Elzaki, S. M. Elzaki, and E. M. A. Hilal, “Elzaki and Sumudu transforms for solving some differential equations,” *Glob. J. Pure Appl. Math.*, vol. 8, no. 2, pp. 167–173, 2012.

[15] U. M. Surakarta, “Konferensi Nasional Penelitian Matematika dan Pembelajarannya,” *J. Phys. Conf. Ser.*, vol. 1265, no. 1, pp. 971–980, 2019, doi: 10.1088/1742-6596/1265/1/011001.

[16] W. Gazali, H. Soeparno, and J. Ohliati, “Penerapan Metode Konvolusi Dalam Pengolahan Citra Digital,” *J. Mat Stat*, vol. 12, pp. 103–113, 2012.

[17] T. A. K. H. Orde-n, “y (t) □ □ g (t □ u) f (u) du . . 0,” 2015.

[18] F. H. A. Arie Wijaya, Yuni Yulida, “Hubungan Antara Transformasi Laplace Dengan Transformasi Elzaki, Jurnal Matematika Murni dan Terapan ‘epsilon’ Vol.9 No.1 hal. 12-19. 2015.”

[19] Y. H. Yudhi, “Transformasi Laplace Modifikasi Untuk Menyelesaikan Beberapa Persamaan Diferensial Biasa Linear,” *Bimaster Bul. Ilm. Mat. Stat. dan Ter.*, vol. 8, no. 1, pp. 53–62, 2019, doi: 10.26418/bbimst.v8i1.30522.